MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

FADU

CÁTEDRA DE MATEMÁTICA

MATEMATICA BÁSICA

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Muchas situaciones o problemas que se dan en el campo de la Matemática aplicada a la arquitectura, a la ingeniería, a la economía o inclusive las ciencias sociales pueden modelarse mediante una ecuación o sistema de ecuaciones que representan las condiciones o restricciones de un problema en particular.

Se presentará un nuevo método para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Para introducirlo se plantea el siguiente problema:

"Un contratista dispone de 5000 horas de mano de obra para 3 proyectos con un costo total de $106000, siendo los costos por hora de los tres proyectos $16, $20 y $24 respectivamente. Si el número de horas para el tercer proyecto es igual a la suma de las horas requeridas por los otros dos, ¿De cuántas horas dispone en cada uno de los proyectos?"

Incógnitas: X, Y, Z : cantidad de horas para cada uno de los tres proyectos

Planteo del problema, sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=5000 \\ 16x+20y+24z=106000 \\ z=x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=5000 & (1) \\ 16x+20y+24z=106000 & (2) \\ -x-y+z=0 & (3) \end{cases}$$

Resolución: se utiliza el **método de reducción**.

Se suman miembro a miembro las ecuaciones (1) y (3).

$$\begin{array}{r} x+y+z=5000 \\ \underline{-x-y+z=0} \\ 2z=\ 5000 \end{array} \quad \Rightarrow z=2500$$

Se multiplica la ecuación (1) por (-16) y se sustituye el valor de z.

$$-16x-16y-16.2500=-16.5000$$
$$-16x-16y-40000=-80000 \qquad (1')$$

Se suman miembro a miembro la ecuación (1') y la (2).

$$\begin{array}{r} -16x-16y-40000=-80000 \\ \underline{16x+20y+24.2500=106000} \\ 4y+20000=26000 \end{array} \quad \Rightarrow \quad y=1500$$

Reemplazando en la ecuación (1) los valores de *z* e *y*.

$$x+1500+2500=5000 \qquad \Rightarrow \qquad x=1000$$

Respuesta: El proyecto “x” dispone de 1000 horas de mano de obra.
El proyecto “y” dispone de 1500 horas de mano de obra.
El proyecto “z” dispone de 2500 horas de mano de obra.

Estos procedimientos algebraicos pueden ser complicados, en especial cuando se aplican a sistemas lineales más grandes.

Método de reducción de Gauss

Dado el sistema de ecuaciones lineales del problema $\begin{cases} x + y + z = 5000 \\ 16x + 20y + 24z = 106000 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$

Se puede representar mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 20 & 24 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} . \underset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} 5000 \\ 106000 \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow A . X = C$$

Se denomina:

A= matriz de coeficientes X = matriz de las incógnitas

C = matriz términos independientes

Matriz de los coeficientes ampliada: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 16 & 20 & 24 & 106000 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

El método de Gauss es una generalización del método de reducción, que se utiliza para eliminar una incógnita en los sistemas de ecuaciones lineales. Consiste en la aplicación sucesiva del método de reducción, utilizando los criterios de equivalencia de sistemas para transformar la matriz de los coeficientes ampliada con los términos independientes en una matriz triangular, de modo que cada fila (ecuación) tenga una incógnita menos que la inmediatamente anterior. Se obtiene así un sistema, que se denomina **escalonado**, tal que la última ecuación tiene una única incógnita, la penúltima dos incógnitas, la antepenúltima tres incógnitas y la primera todas las incógnitas.

Resolución del problema utilizando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 16 & 20 & 24 & 106000 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 16 & 20 & 24 & 106000 \\ 0 & 0 & 2 & 5000 \end{array}\right) \quad F_1 + F_3 \to F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 4 & 8 & 26000 \\ 0 & 0 & 2 & 5000 \end{array}\right) \quad F_1(-16) + F_2 \to F_2$$

Se reconstruye el sistema con las incógnitas: $\begin{cases} x + y + z = 5000 \\ 4y + 8z = 26000 \\ 2z = 5000 \end{cases}$

Se despejan las variables a partir de la última ecuación hacia atrás:

$$2\,z = 5000 \quad \to \quad z = 2500$$

$$4y + 8\,z = 26000 \quad \to \quad 4y + 8 \cdot 2500 = 26000 \quad \to \quad y = 1500$$

$$x + 1500 + 2500 = 5000 \quad \to \quad x = 1000$$

Por lo tanto, la solución de sistema es la terna (1000, 1500, 2500).

Este método matricial para resolver un sistema lineal se puede resumir en:

I). Transformar la matriz aumentada del sistema lineal en una matriz equivalente de forma triangular con las siguientes **operaciones elementales de filas:**

1. Intercambiar dos filas.
2. Multiplicar una fila por una constante distinta de cero.
3. Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.

II). Reconstruir la matriz triangular obtenida en un sistema lineal equivalente al sistema original y despejar las variables por sustitución hacia atrás.

Otros ejemplos

Ejemplo 1:

Dado el sistema: $\begin{cases} 2x+5y+8z=11 \\ x+4y+7z=10 \\ 3x+6y+12z=15 \end{cases}$

1) Se arma la matriz aumentada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ 3 & 6 & 12 & 15 \end{array}\right)$$

2) Se intercambian R_1 y R_2 para lograr un 1 en la posición a_{11}.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 12 & 15 \end{array}\right)$$

3) Se suma la primera fila multiplicada por -2 a la segunda, y la primera multiplicada por -3 la tercera.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -6 & -9 & -15 \end{array}\right) \quad -2F_1+F_2 \to F_2 \quad \text{y} \quad -3F_1+F_3 \to F_3$$

4) Se multiplica la fila 2 por $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -9 & -15 \end{array}\right) \quad -\frac{1}{3}F_2 \to F_2$$

5) Se suma la fila 2 multiplicada por 6 a la fila 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \quad 6F_2+F_3 \to F_3$$

6) Se reconstruye el sistema de ecuaciones obteniendo un sistema equivalente escalonado.

$$\begin{cases} x + 4y + 7z = 10 \\ \quad\quad y + 2z = 3 \\ \quad\quad\quad 3z = 3 \end{cases}$$

7) Por último, se despejan las variables por sustitución hacia atrás

$$3\,z = 3 \;\rightarrow\; z = 1$$

$$y + 2\,z = 3 \;\rightarrow\; y + 2 \cdot 1 = 3 \;\rightarrow\; y = 1$$

$$x + 4 \cdot 1 + 7 \cdot 3 = 10 \;\rightarrow\; x = -1$$

Por lo tanto la solución del sistema es la terna ordenada: (-1 , 1 , 1). **Sistema compatible determinado.**

Ejemplo 2:

Resolver el sistema: $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 6x - 4y + 2z = 3 \end{cases}$

Solución: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & 2 & 3 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad F_1 \leftrightarrow F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 8 & -9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} -3\,F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ -6\,F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad -2\,F_2 + F_3 \to F_3$$

La última fila corresponde a una ecuación errónea 0 = 1, lo cual significa que el sistema dado no tiene solución. **Sistema Incompatible**.

Ejemplo 3:

Resolver el sistema: $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ 5x + 5z = 9 \end{cases}$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & -10 & 10 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} -2\,F_1 + F_2 \to F_2 \\ -5\,F_1 + F_3 \to F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad -2F_2 + F_3 \to F_3$$

Como la última fila consiste solamente de ceros, se trata de un sistema equivalente

de dos ecuaciones con tres incógnitas.

$$\begin{cases} x + 2\,y - z = 1 \\ -5\,y + 5\,z = 2 \end{cases}$$

Este sistema tiene una forma triangular incompleta, hay dos ecuaciones con tres incógnitas.
Se asigna a la incógnita “z” un valor “z=c” siendo “c” cualquier número real.

Empleando la sustitución hacia atrás, primero se despeja en la última ecuación "*y*" en términos de "*z*" y se obtiene $y = \frac{-2}{5} + c$ y luego sustituyendo en la primera ecuación, se obtiene:

$$x + 2y - z = x + 2 \cdot (-\frac{2}{5} + c) - c = 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{9}{5} - c$$

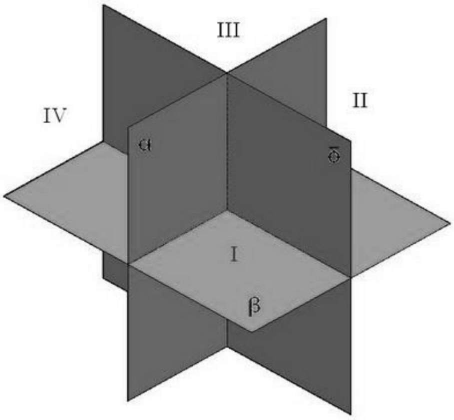
Las soluciones, se pueden expresar de la forma: $\left(\frac{9}{5} - c, -\frac{2}{5} + c, c \right), c \in \Re$

Por lo tanto, el sistema es **compatible indeterminado**.

Interpretación geométrica de la solución de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas

Geométricamente una ecuación de la forma: $a\,x + b\,y + c\,z = d$ representa un plano en el espacio, por lo que las soluciones de un sistema de ecuaciones lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas se pueden interpretar geométricamente de las siguientes maneras:

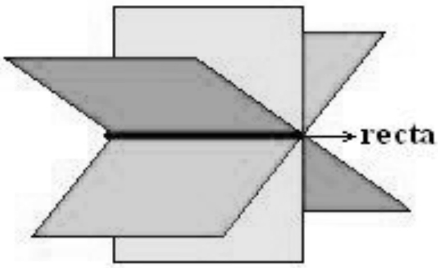
1. Si se llega a un sistema en forma triangular completo, el sistema tiene solución única; es decir, el sistema es compatible determinado y geométricamente su solución representa las coordenadas del punto intersección de los tres planos.



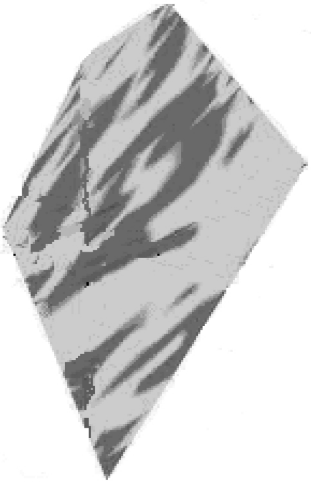
Tres planos que se intersecan en un punto común

2. Si se llega a un sistema en forma triangular incompleta, y no hay ecuaciones falsas, es decir cuando se obtiene una fila de la matriz de la forma $0 \quad 0 \quad 0 \ldots\ldots 0 \,|\, 0$, el sistema tiene infinitas soluciones; por lo tanto, es compatible indeterminado y geométricamente su solución puede representar:

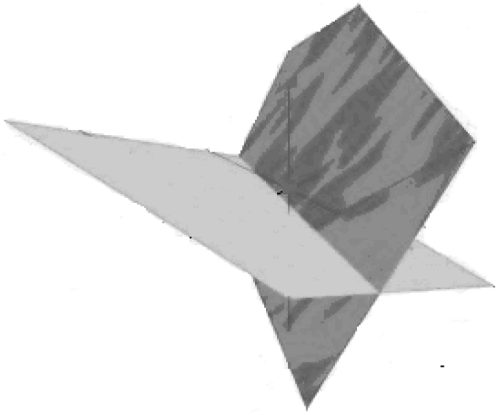
a- Haz de planos



b-Tres planos superpuestos

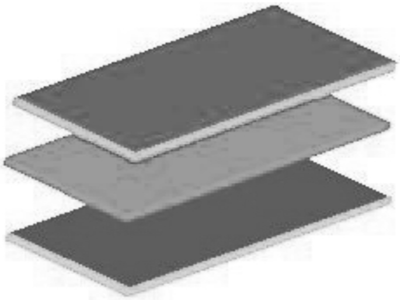


c- Dos planos superpuestos y otro que los corta

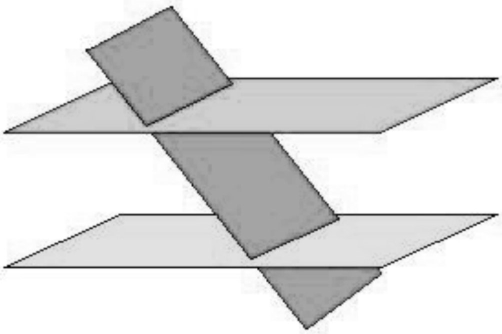


3. Si se llega a un sistema con una ecuación falsa, es decir cuando se obtiene una fila de la matriz de la forma: $0 \quad 0 \quad 0 \ldots\ldots 0 \mid \quad P$ en el cual $P \neq 0$, el sistema no tiene solución, por lo tanto el sistema es incompatible y geométricamente puede representar:

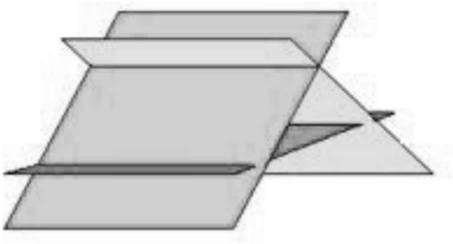
a-Tres planos paralelos



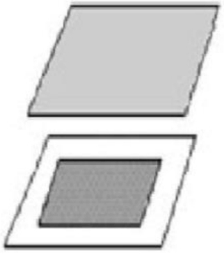
b- Tres planos y dos de ellos paralelos



c- Plano paralelo a la línea de corte de los otros dos



d- Dos planos superpuestos y otro paralelo



En resumen, cuando se emplea el método de matrices, se deben tener en cuenta:

- Si se llega a un sistema lineal en forma triangular, el sistema tiene solución única que se puede determinar por sustitución hacia atrás. **Sistema compatible determinado.**
- Si se llega a un sistema lineal con una forma triangular incompleta y no hay ecuaciones falsas, el sistema tiene infinitas soluciones que se pueden determinar por sustitución hacia atrás. **Sistema compatible indeterminado**.
- Si se llega a un sistema lineal con una ecuación falsa, el sistema no tiene solución. **Sistema incompatible**.

Aplicaciones de los Sistemas de ecuaciones lineales

Ajuste de curvas

Si tenemos **n** puntos distintos, tendremos un único polinomio de grado n-1 que se ajuste a los puntos dados. También se pueden determinar otros polinomios de grado menor a n-1 que pasen por esos puntos, pero el ajuste no sería el óptimo.

Es decir, se tienen como dato un conjunto de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$ y se necesita encontrar un polinomio de la forma:
$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-2} n^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1}$ que pase por esos puntos.

Con frecuencia, los puntos dados se obtienen experimentalmente mediante mediciones. Los coeficientes del polinomio $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$ buscado se pueden encontrar sustituyendo los puntos en la ecuación del polinomio y resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que resulta.

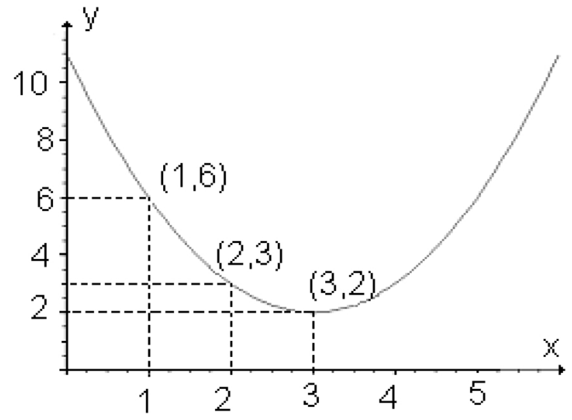
Ejemplo: Dados los puntos (1,6), (2,3) y (3,2) se tendrá un polinomio de la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Entonces, se plantea el sistema: $\begin{cases} p(1) = 6 \\ p(2) = 3 \\ p(3) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 6 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 2 \end{cases}$

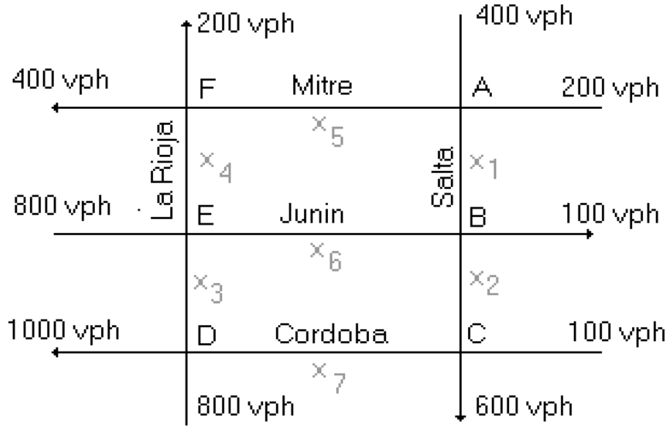
Resolviendo este último sistema, se tiene: $a_0 = 11,\ a_1 = -6\ \ y\ \ a_2 = 1$

Por lo tanto, el polinomio buscado es: $p(x) = 11 - 6x + x^2$ cuya grafica es la parábola:



Flujo de Tráfico

Analizaremos el ejemplo de la red de calles que se muestra en la figura:



Con las siguientes consideraciones:

- Todas las calles son de un solo sentido (las flechas indican la dirección del flujo).

- El flujo que entra y que sale de la red se mide en vehículos por hora (vph).
- Los datos que se presentan se basan en las horas pico.
- Al flujo de tráfico a través de los distintos ramales los simbolizamos con:

x_1 , x_2 , x_3, x_4 , x_5 , x_6 , x_7 .

Ley de conservación del flujo en el tráfico:

Todo el tráfico que llega a una unión debe salir de esa unión.

La restricción de la conservación del flujo en el tráfico lleva a un sistema de ecuaciones lineales. Se tiene, entonces:

Unión A: Tráfico de entrada = 400 + 200. Trafico de salida = $x_1 + x_5$ Por lo tanto, queda:

$$x_1 + x_5 = 600$$

Unión B: Tráfico de entrada = $x_1 + x_6$. Trafico de salida = $x_2 + 100$ Por lo tanto, queda:

$$x_1 + x_6 = x_2 + 100$$

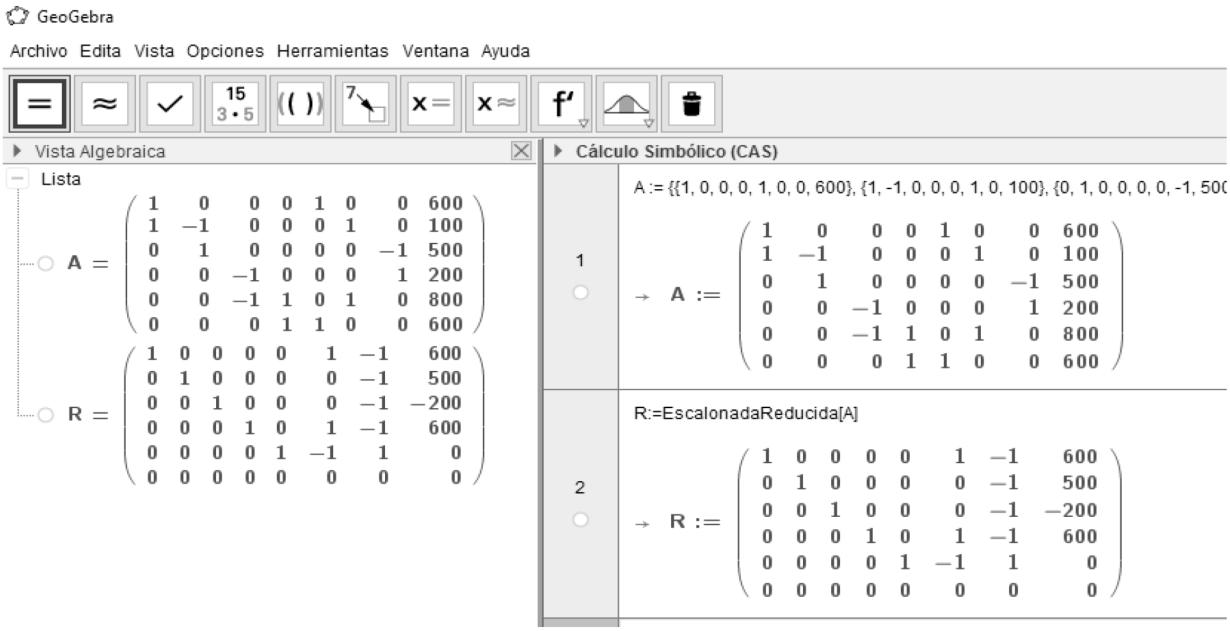
Continuando de la misma manera, se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lccccccccl}
\textit{Unión A} & x_1 & & & & +x_5 & & & = 600 \\
\textit{Unión B} & x_1 & -x_2 & & & & +x_6 & & = 100 \\
\textit{Unión C} & & x_2 & & & & & -x_7 & = 500 \\
\textit{Unión D} & & & -x_3 & & & & +x_7 & = 200 \\
\textit{Unión E} & & & -x_3 & +x_4 & & +x_6 & & = 800 \\
\textit{Unión F} & & & & x_4 & +x_5 & & & = 600
\end{array}$$

Se tiene, entonces, la siguiente matriz aumentada para resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 600 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 500 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 200 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 800 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 600
\end{pmatrix}$$

Cargando esta matriz en **Geogebra** con el comando **EscalonadaReducida[ ]** se puede obtener la matriz escalonada reducida por renglones equivalente a la matriz dada.



Matriz escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Reconstruyendo el sistema se tiene:

$$\begin{cases} x_1 + x_6 - x_7 = 600 \\ x_2 - x_7 = 500 \\ x_3 - x_7 = -200 \\ x_4 + x_6 - x_7 = 600 \\ x_5 - x_6 + x_7 = 0 \end{cases}$$

Si se despeja cada variable en término de las variables restantes, se obtiene:

$$\begin{cases} x_1 = -x_6 + x_7 + 600 \\ x_2 = x_7 + 500 \\ x_3 = x_7 - 200 \\ x_4 = -x_6 + x_7 + 600 \\ x_5 = x_6 - x_7 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones tiene muchas soluciones; es decir, existen varios flujos de tráfico posible.

Como toda afluencia de tráfico debe ser mayor o igual a cero, la tercera ecuación implica que el valor mínimo para x_7 es 200 $(x_7 \geq 200)$, ya que de otra manera x_3 sería negativa (una afluencia negativa se interpreta como un tráfico que se mueve en dirección contraria a la permitida en una calle de un solo sentido), la quinta ecuación implica que x_6 debe ser mayor o igual a x_7 $(x_6 \geq x_7)$ y la segunda y la cuarta implican que $x_6 - x_7 \leq 600$, por lo que las restricciones generales del sistema serán:

$$\begin{aligned} &x_7 \geq 200 \\ &x_6 \geq x_7 \\ &x_6 - x_7 \leq 600 \end{aligned}$$

Suponiendo que hay que hacer algunas reparaciones en la calle Córdoba entre La Rioja y Salta, se quiere tener la menor afluencia de tráfico en esta calle, por lo que cabe preguntarse, por ejemplo: ¿Cuál es la menor afluencia de tráfico en la calle Córdoba sin que se provoque un congestionamiento?, ¿Cuál sería entonces la afluencia de tráfico en las otras calles? El modelo planteado permitirá responder a estas preguntas.

Minimizar la afluencia de tráfico en la calle Córdoba corresponde a minimizar x_7.

El valor mínimo para x_7 es 200, de manera que los trabajos de reparación deben permitir una afluencia de por lo menos 200 vph en el ramal CD durante las horas pico. Remplazando este valor se tiene:

$$\begin{cases} x_1 = & -x_6 & +800 \\ x_2 = & & 700 \\ x_3 = & & 0 \\ x_4 = & -x_6 & +800 \\ x_5 = & x_6 & -200 \end{cases}$$

$x_7 = 200$ implica $x_3 = 0$, entonces la afluencia mínima en x_7 se obtiene haciendo $x_3 = 0$; es decir, cerrando DE al tráfico.

- **Sistemas de ecuaciones**

23) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} -3x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}y = -\dfrac{1}{4} \\ 3x - 4y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - \dfrac{1}{3}y = 2 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 4y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 8 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x-10=5z-y \\ -2y+z=-x+1 \\ -4z-11=y-5x \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4u+x+3t=0 \\ -2u+2-2t=0 \\ 4u+3x-1+t=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x+3y+2z+4w=4 \\ 4x+10y-4z=-8 \\ -3x-2y-5z-2w=-4 \\ -2x+4y+4z-7w=-1 \end{cases}$

24) Escribir un sistema para cada problema y luego resolver:

a) Hallar tres números sabiendo que el primero es igual a dos veces el segundo más la mitad del tercero, que la suma del segundo y el tercero es igual al primero más 1, y que si se resta el segundo de la suma del primero con el tercero el resultado es 5.

b) De un trapecio isósceles sabemos que el doble de la altura es el triple de la base menor; la suma de las dos bases y la altura es 9; y el doble de la base menor más el triple de la base mayor menos la altura, da 13. ¿Cuáles son sus dimensiones?

25) Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ -14 \end{pmatrix}$ b) $\begin{cases} x+2z=4 \\ 2x-y=-8 \\ 3y+4z=0 \end{cases}$ c) $x.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}+y.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+z.\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

26)
a) Plantear y resolver el sistema de ecuaciones que resuelve cada uno de los siguientes problemas.
b) Verificar los resultados del ítem anterior resolviendo los sistemas de ecuaciones utilizando GEOGEBRA.

I) Una compañía petrolífera posee tres refinerías I, II y III, que producen las siguientes cantidades (en litros) de fuel, gasoil y nafta por cada barril de crudo:

Refinería	I	II	III
Fuel	50	30	75
Gasoil	30	65	40
Nafta	70	55	30

Si la demanda de fuel, gasoil y nafta es de 10.775.000, 8.675.000 y 10.175.000 litros, respectivamente, ¿Cuántos barriles de crudo necesitará cada refinaría para satisfacer la demanda?

II) Un parquímetro contiene un total de 100 monedas de 0,25 0,50 y 1 peso. Si su valor total es de $40 y el número de monedas de 0,25 es 6 veces el de monedas de 0,50; ¿Cuántas monedas de cada tipo hay?

III) Un señor acertó 5 números en la lotería, dos de los cuales eran el 23 y el 30. Propuso a sus hijos que, si averiguaban los otros tres, se podrían quedar con el premio. La suma del primero con el segundo excedía en dos unidades al tercero; el segundo menos el doble del primero era diez unidades menor que el tercero, y la suma de los tres era 24. ¿Cuáles son los tres números que faltan?

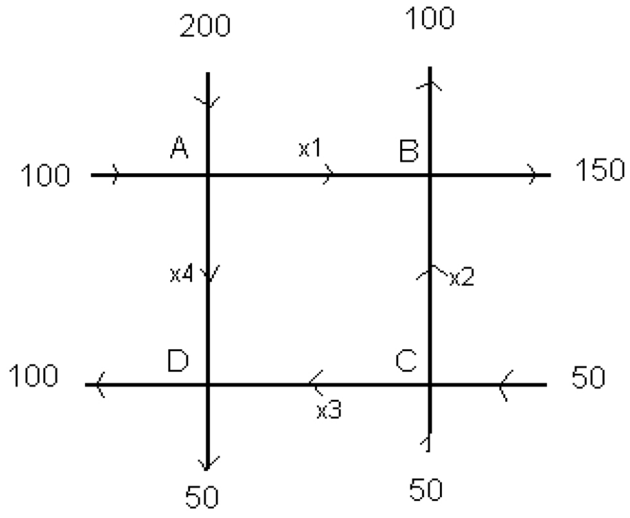
IV) Una empresa dispone de $27200 para actividades de formación de sus 100 empleados. Tras estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A, B y C. La subvención por persona para el curso A es de $400, para el B es de $160 y de $200 para el C. Si la cantidad que se dedica para el curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿Cuántos empleados siguen cada curso?

V) Encontrar el polinomio de grado dos ($P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$), cuya gráfica pasa a través de los puntos: (1,2) ; (2,2) ; (3,4)

VI) Encontrar el polinomio de grado tres ($P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$), cuya gráfica pasa a través de los puntos: (1,-3) ; (2,-1) ; (3,9) ; (4,33).

VII) Construir un modelo matemático que describa el flujo de tráfico en la red de avenida de la figura. Todas las avenidas son de un solo sentido, en la dirección indicada. Las unidades se dan en vehículos por hora.

a) Dar dos flujos de tráfico distintos posibles.
b) ¿Cuál es la afluencia mínima posible que puede esperarse a lo largo del ramal AB?



24) a) $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ y 3 b) b=2, B=4 y h=3

25) a) $x = 6,\ \ y = 1$ b) $x = -8,\ \ y = -8,\ \ z = 6$ c) $x = 2,\ \ y = 1,\ \ z = 1$

26) I) 70000, 55000 y 75000 para las refinerías I, II y III respectivamente.
ii) 72, 12 y 16 de \$0,25, \$0,50 y \$1 respectivamente.
iii) 4, 9 y 11
iv) Curso A: 40 Curso B: 20 Curso C: 40
v) $p(x) = 4 - 3x + x^2$
vi) $p(x) = -3 + x - 2x^2 + x^3$
vii) a) Se deben dar valores posibles a x_4 ($50 \le x_4 \le 150$) y obtener los restantes.
b) 150 v/h